Colle du 10/06 - Sujet 1
Géométrie et révisions

Exercice 1. Calculer le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$. Quand est-ce que M est inversible ?

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y+az=1 \end{cases}$. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires et déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique du plan les contenant.

Exercice 3. Montrer que pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, on a $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos(x)$.

---

lycée Raoul Follereau
Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 10/06 - Sujet 2
Géométrie et révisions

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ m & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de M.

Exercice 2.

1. Déterminer les valeurs de a pour que $A\,(2,3,1)$, $B\,(1,2,0)$, $C\,(3,1,-2)$ et $D\,(a,4,3)$ soient coplanaires.
2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{P}_m : m^2x + (2m-1)\,y + mz = 3$. Déterminer $\bigcap_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_m$.

Exercice 3. Soit $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$. Déterminer $f\,(\mathbb{R})$, $f\,(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ et $f\,(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

---

lycée Raoul Follereau
Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 10/06 - Sujet 3
Géométrie et révisions

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\,(a_k)\,Q^{(k)}\,(a_k)\,.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Exercice 2. On considère les plans

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: ax+y+z+1=0 \\ \mathcal{P}_2 &: x+ay+z+a=0 \\ \mathcal{P}_3 &: x+y+az+b=0 \end{aligned}$$

Déterminer les réels a et b pour que l'intersection de ces trois plans soient une droite. Préciser dans ce cas l'équation cartésienne et paramétrique de la droite.

Exercice 3. Calculer les puissances de $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.